

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică  
Sesiunea Iulie 2021  
Subiect la Matematică

**Subiectul 1.** Se consideră mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Arătați că  $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x) \in \mathcal{M}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- (b) Calculați  $(A(2021))^n$ , unde  $n$  este un număr natural nenul.
- (c) Calculați  $A(1) \cdot A(2) \cdot A(2^2) \dots A(2^{2021})$ .

**Subiectul 2.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}^*$  două numere reale, cu  $a > 0$ , mulțimea  $A = \left(\frac{b}{a}, \infty\right)$  pe care este definită legea de compoziție

$$x * y = axy - bx - by + \frac{b(b+1)}{a} \quad \text{pentru orice } x, y \in A,$$

și funcția  $f : A \rightarrow (0, \infty)$  definită prin  $f(x) = ax - b$  pentru orice  $x \in A$ .

- a) Arătați că  $f$  este un izomorfism de la  $(A, *)$  la  $((0, \infty), \cdot)$ .
- b) Arătați că  $(A, *)$  este un grup; determinați elementul său neutru și simetricul unui element oarecare  $x \in A$ .
- c) Rezolvați în  $A$  ecuația

$$x * \frac{a^2 + b}{a} = \frac{b^2 + b}{a}.$$

**Subiectul 3.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 12x$ . Determinați ecuația tangentei la graficul funcției  $f$  care trece prin punctul  $A(0, 16)$

**Subiectul 4.** Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} -3 \cos \pi x + x + 1 & , \quad x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & , \quad x > 2 \end{cases}$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$

- a) Arătați că funcția  $f$  este derivabilă pe  $\mathbb{R}$ ;

b) Calculați  $\int_1^3 f(x) dx$ ;

- c) Dacă pentru  $n \in \mathbb{N}$  notăm  $I_n = \int_2^3 f^n(x) dx$ , arătați că șirul  $(I_n)_{n \geq 0}$  este convergent și calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii și se notează cu note cuprinse între 1 și 10.

**Timp de lucru:** 3 ore.